Lengths of proofs of presburger formulas

【101】

氏　名（本　籍）	遊上　毅（大阪府）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	博　乙　第　187　号
学位授与年月日	昭和59年3月22日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
審査研究科	数学研究科
学位論文題目	**Lengths of Proofs of Presburger Formulas** （プレスバーガー論理式の証明の長さ）

主　査	筑波大学教授	理学博士	西村　敏男
副　査	筑波大学教授	理学博士	太刀川　弘幸
副　査	筑波大学教授	理学博士	中川　久雄
副　査	筑波大学助教授	理学博士	本橋　信義

論　文　の　要　旨

ペアノの自然数論の形式的体系をN_1とする。本論文で著者は，「P(a)をN_1の論理式，mを自然数とする。任意の自然数nに対してP(n)が長さm以下の証明でN_1で証明可能とする。このときAxP(x)はN_1で証明可能か？」という問題を中心に，さらにこれに関連して，証明の長さと証明のspeed upに関する研究を行ない，いくつかの重要な結果を与えている。ここでの証明の長さというのは，その証明に含まれる推論規則の個数のことである。以下で，N_0とはN_1から乗法記号とその公理を除いた体系，N_2とはN_1の乗法を述語で記述した体系である。またN_0^*，N_1^*はN_0，N_1数学的帰納法を除いた体系，N_2^+はN_2の数学的帰納法の公理にある種の制限を加えたものである。題目のプレスバーガー論理式とはN_0の論理式のことである。著者はつぎの定理を証明している。

定理1．つぎのような関数fが存在する。任意の自然数mと，N_0の，否定記号と含意記号を含まない論理式Aに対して，AがN_1^*で長さm以下の証明で証明可能ならば，AはN_0^*で長さf)m)以下の証明で証明可能である。

F_1をN_1^*で証明可能なN_0の否定記号，含意記号を含まない命題の集合とする。定理1は，F_1に関するN_0^*のN_1^*による証明のspeed upの上限の存在を示している。さらに著者は，N_0の等式の集合をつぎのように帰納的に定義し，それに関する定理を証明している。

定義　　$G(o)=\{s+o=s,\ s+t'=(s+t)',\ s=s\}$,

$G(n+1)=G(n)U\ \{u(t)=v(t) \mid u(s)=v(s)$
と$s=t$は$G(n)$の元$\}$

定理2．つぎのようは関数 f が存在する。任意の自然数mとN_0の任意の等式$s=t$に対して，$s=t$が$N_1{}^*$で長さm以下の証明で証明可能ならば，$s=t$は$G(f(m))$の元である。

さらにつぎの定理を証明している。

定理3．つぎのような関数 f が存在する。任意の自然数mと，N_0の任意の論理式Aに対して，Aが$N_2^{\ddagger}$で長さm以下で証明可能ならば，AはN_0で長さf(m)以下で証明可能である。

F_2をN_0の正しい論理式の全体とする。このとき，定理3は，F_2に関するN_0の$N_2^{\ddagger}$によるspeed upの上限の存在を示している。

審　査　の　要　旨

本論文で扱われている問題は，ゲーデルの不完全性定理からもたらされた自然な問題であるが，解決は意外に困難である。この問題に対しては，著者も指摘するようにつぎの2つの問題が本質的である。

問題1　つぎのような関数が存在するか？任意の自然数mとN_0の任意の論理式Aに対して，AがN_1で長さm以下で証明可能ならば，AはN_0で長さf(m)以下で証明可能である。

問題2　N_1で長さm以下で証明可能なN_0の等式の形の上での特徴づけを与えよ。

定理1は問題1のN_0，N_1を$N_0{}^*$，$N_1{}^*$で置きかえた肯定的な解で，定理3は，N_1を$N_2^{\ddagger}$で置きかえた肯定的な解である。また，定理2は問題2のN_1を$N_1{}^*$で置きかえた解である。

“証明の長さ”についての研究は近年盛んになりつつある。著者の証明方法は証明論的方法に基づくものであり，独創的であると共に，この方面の解析に新風を与えたものといえる。著者の与えた結果と共に，今後この分野の発展に大きな貢献をなすものと考えられる。

よって，著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。